Классы моделей в ТПР

- Принятие решений в условиях риска.
- Принятие решений в условиях полной неопределённости.
- Принятие решений в условиях определённости.

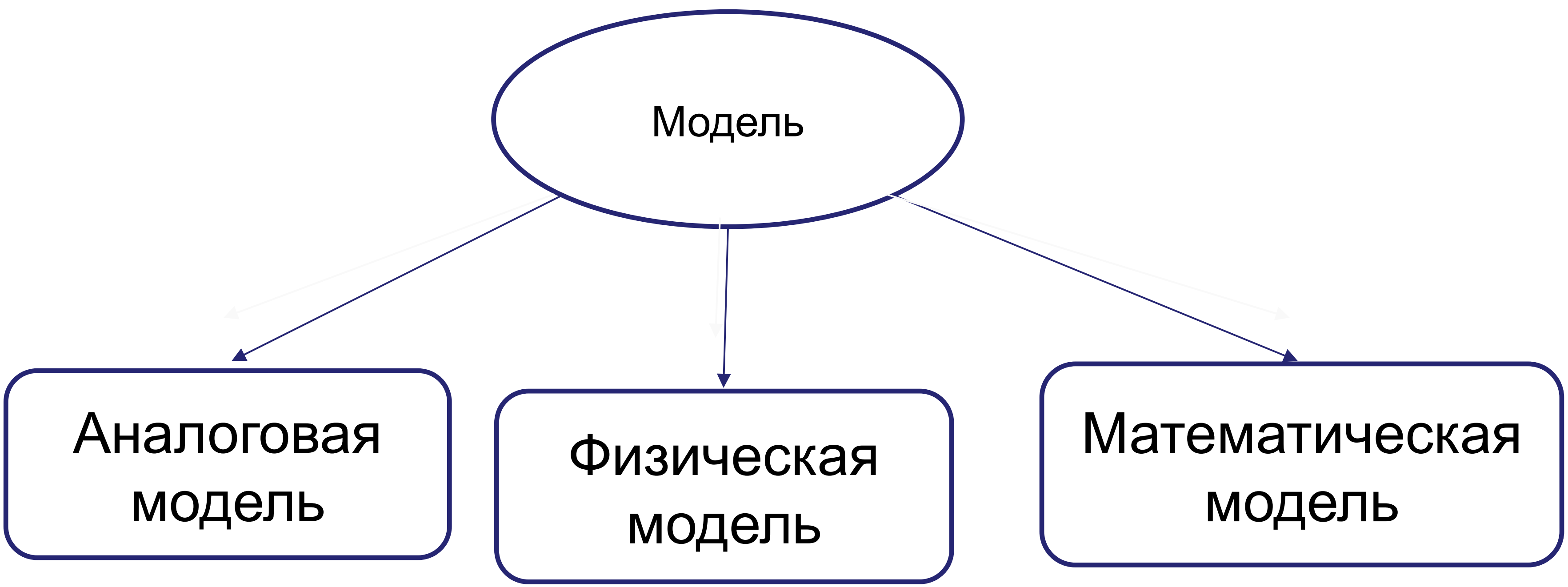
- ***Модели в условиях риска*** характеризуются наличием нескольких альтернатив и нескольких состояний природы, относительно которых известны вероятности их наступления.

В ***моделях в условиях полной неопределённости*** имеется несколько альтернатив и несколько состояний природы, но о вероятностях их наступления ничего неизвестно.

В ***моделях в условиях полной определённости*** имеется несколько альтернатив (их может быть и бесконечно много), а о природе все точно известно и у неё имеется только одно-единственное состояние.

Оптимальные решения, найденные в задачах данного типа, являются объективными и не зависят от пристрастий и вкусов ЛПР, если только оно действует в рамках данного и единственного состояния природы.

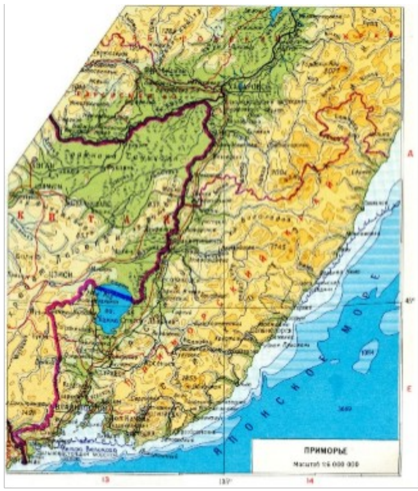
Моделирование в теории принятия решений



Аналоговая модель

Аналоговая модель - это модель, основанная на аналогии или подобии между объектами, операциями или процессами, имеющими различную физическую природу.

Лекарственные препараты сначала проверяют на животных, чтобы понять реакцию человека



Физическая карта-
адекватная аналоговая
модель реальной
местности.

Фотография тоже является
аналоговой моделю.

Схема метро

Часы - аналоговая модель течения времени.

Физическая модель

Физическая модель - это уменьшенная в несколько раз материальная копия исследуемого объекта в основных, наиболее существенных чертах, воспроизводящая реальный объект в искусственно созданных условиях, имитирующих реальные окружающие условия и воздействия.

Физическое моделирование

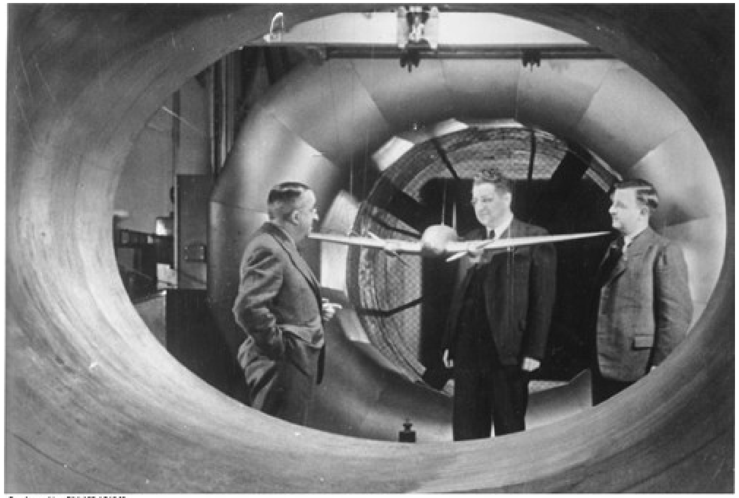
Физическое моделирование - это исследование поведения реального объекта в реальных условиях при реальных воздействиях путём проведения экспериментальных исследований *на его физической модели,* в условиях, имитирующих реальную внешнюю среду и реальные воздействия.

Примеры физических моделей

Моделирование перегрузки или невесомости на специальных установках.

Глобус – физическая модель планеты земля.

Примеры физических моделей



Bundesarchiv, Bild 183-L21649
Foto: Lysiak | o.Dat.

В аэродинамических трубах испытывают небольшие модели, представляющие собой по форме точную копию проверяемого самолёта

Когда применяют физические модели

- исследуемый объект слишком сложен для моделирования другими средствами;
- окружающие условия и воздействия при функционировании объекта не могут быть воспроизведены в реальности или не доступны для проведения исследований;
- изготовление реального объекта и его натурные испытания в реальных условиях сопряжены с огромными рисками, неоправданными затратами ресурсов и потерями, катастрофами и непредвиденными последствиями.

Математическая модель

Математическая модель – это идеализированный образ реального объекта, выраженный в математических понятиях и символах, с определённой степенью адекватности отражающий наиболее существенные свойства и характеристики реального объекта.

Математическое моделирование заключается в исследовании реального объекта с помощью построенной математической модели.

Линейное программирование (ЛП) – наука, изучающая линейные оптимизационные математические модели и разрабатывающая методы их решения

Виды задач линейного программирования:

1. Задачи линейного программирования, в которых переменные математической модели могут принимать любые значения (как дробные, так и целые) из области допустимых решений.

- задача планирования производства или задача об оптимальном использовании ресурсов;
  - задача о составлении рациона питания;
  - задача о составлении смеси;
  - задача формирования инвестиционного портфеля.

2. Транспортная задача - об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

3. Задачи, сводящиеся к задачам транспортного типа:

- задача формирования оптимального штата фирмы;
- задача оптимального распределения посевных площадей.

Целью (и критерием) задачи ЛП является получение максимальной суммарной прибыли от реализации произведенной продукции.

Неуправляемые факторы – заданные и неизменные нормы расхода ресурсов, предельные количества ресурсов и величины прибыли от реализации единицы всех видов продукции.

Совокупность неуправляемых факторов определяет ограничения.

Управляемые факторы (переменные математической модели) представляют собой объемы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выпускаемой продукции *n* видов,

совокупность управляемых факторов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – возможные решения (альтернативы).

Множество возможных решений формируется ограничениями.

ЛПР – руководитель предприятия.

Модель задачи ЛП включает

- совокупность переменных $x_1,\ldots,x_n$;
- некоторую функцию $z = z(x_1,\ldots,x_n)$ (целевая функция);
- условия (систему ограничений)

  $f_i(x_1,\ldots,x_n) \le b_i$ или $f_i(x_1,\ldots,x_n) = b_i$, i=1,…m,
- где z и f_i – заданные функции, а b_i-некоторые действительные числа.

Пример

На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца, приведены в таблице.

Вид корма	**Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать**		**Запас корма**
	лисица	песец	
1	2	2	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, руб.	1600	1200	

Определить сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме чтобы прибыль от реализации была максимальной.

- Составим математическую модель задачи

- Переменные x_1,x_2 будут выражать количество лисиц и песцов соответственно, которое нужно выращивать на звероферме.

- Прибыль можно задать функцией:

$$z = 16\,x_1 + 12\,x_2.$$

- Тот факт, что нам необходимо максимизировать функцию обозначается так:

$$z = 16\,x_1 + 12\,x_2 \to max.$$

- Для того, чтобы прокормить x_1 лисицу и x_2 песцов нам понадобится:
- корма I вида $2x_1+3x_2$,
- корма II вида $4x_1+x_2$,
- корма III вида $6x_1+7x_2$.

- Запасы корма ограничены

$$2x_1+3x_2 \leq 180,$$
$$4x_1+x_2 \leq 240,$$
$$6x_1+7x_2 \leq 420.$$

- Кроме того, число животных не может быть отрицательным и нецелым

- Математическая модель задачи

x_1, x_2 - количество лисиц и песцов.

$$z = 16x_1 + 12x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180 \\ 4x_1 + x_2 \le 240 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 420 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ - } \textit{целые} \end{cases}$$

Пример.

- Задача формирования инвестиционного портфеля.

- Инвестор располагает суммойв 100 тыс.ден,ед. и желает сформировать свойинвестиционный портфель, вложив ее вакции трёх компаний I&J, K&L, M&N. Акции каждой компании характеризуются ожидаемым годовым доходом на одну акцию и ценой акции

Акции компаний	Цена одной акции, ден. ед./ед.	Ожидаемый годовой доход на одну акцию, ден. ед./ед.
I &J	80	15
К &L	25	6
M&N	30	9

- Инвестор предполагает вложить в акции все свои средства, причём

  в акции компании I&J – не менее 20 тыс.ден.ед., в акции компании K&L – не менее 35 тыс.ден.ед., а в акции компании M&N – не более 45 тыс.ден.ед.

- Инвестору необходимо определить, акции каких компаний и в каком количестве ему следует приобрести, чтобы ожидаемая годовая прибыль инвестиционного портфеля была максимальной

- Составим математическую модель задачи

- x_1- количество акций компании I&J,
- x_2- количество акций компании K&L,
- x_3 - количество акций компании M&N.

- Математическая модель задачи

$$z = 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 80x_1 + 25x_2 + 30x_3 = 100\,000 \\ 80x_1 \geq 20\,000 \\ 25x_2 \geq 35\,000 \\ 30x_3 \leq 45\,000 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Пример. Планирование производства

Небольшая семейная фирма занимается переработкой яблок и производством из них трех видов продукции: яблочного сока, джема и яблочного пюре.

Для производства сока используются яблоки только первого сорта, а для производства джема и яблочного пюре используются яблоки как первого, так и второго сорта.

На производство сока, джема и пюре затрачиваются сахарный песок и лимонная кислота.

Количество яблок первого и второго сорта, сахарного песка и пищевых добавок, которыми располагает фирма, ограничены.

Нормы расхода всех видов сырья и их запасы на складе компании приведены в таблице.

Сырье	**Расход сырья (кг) на выпуск 1 *кг* продукции, *кг/кг***			**Запасы сырья на складе фирмы, *кг***
	сок	джем	пюре	
Яблоки 1-го сорта	0,44	0,1	0,15	5000
Яблоки 2-го сорта	0	0,65	0,75	10 000
Сахарный песок	0,05	0,35	0,25	5500
Пищевые добавки	0,002	0,004	0,003	60

- Глава фирмы оценил значения прибыли, которую он получит от реализации 1 *кг* каждого вида продукции, она составила: 45 *ден. ед.* для сока, 18 *ден. ед.* для джема и 24 *ден. ед.* для пюре.

- Необходимо принять решение, какую продукцию и в каком объеме следует выпускать фирме, чтобы суммарная прибыль от их реализации была максимальной.

Пусть

x_1 - количество кг производимого сока;

x_2 - количество кг производимого джема;

x_3 - количество кг производимого пюре.

- Математическая модель задачи

$$z = 45x_1 + 18x_2 + 24x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0,44x_1 + 0,1x_2 + 0,15x_3 \le 5\,000 \\ 0,65x_2 + 0,75x_3 \le 10\,000 \\ 0,05x_1 + 0,35x_2 + 0,25x_3 \le 5\,500 \\ 0,002x_1 + 0,004x_2 + 0,003x_3 \le 60 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования.

- Рассмотрим задачу 2-х переменных

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 \le & b_1, \\ a_{21}x_2 + & a_{22}x_2 \le & b_2, \\ \quad\ldots & \quad\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 \le & b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

- Алгоритм графического метода:

- 1. Строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств.
- 2. Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
- 3. Находим область, удовлетворяющую все неравенства системы ограничений (многоугольник решений).
- 4. Строим вектор $\overline{N} = (c_1, c_2)$,где c_1, c_2 – коэфф.целевой функции.
- 5. Строим линию $c_1x_1+c_2x_2 = 0$

6. Передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{N} = (c_1, c_2)$

Первая встретившаяся вершина точка - точка min. Находим ее координаты и вычисляем значение целевой функции в этой точке $Z_{\min}$.

Последняя встретившаяся вершина является точкой максимума функции.

Находим ее координаты и вычисляем значение целевой функции в этой точке $Z_{\max}$

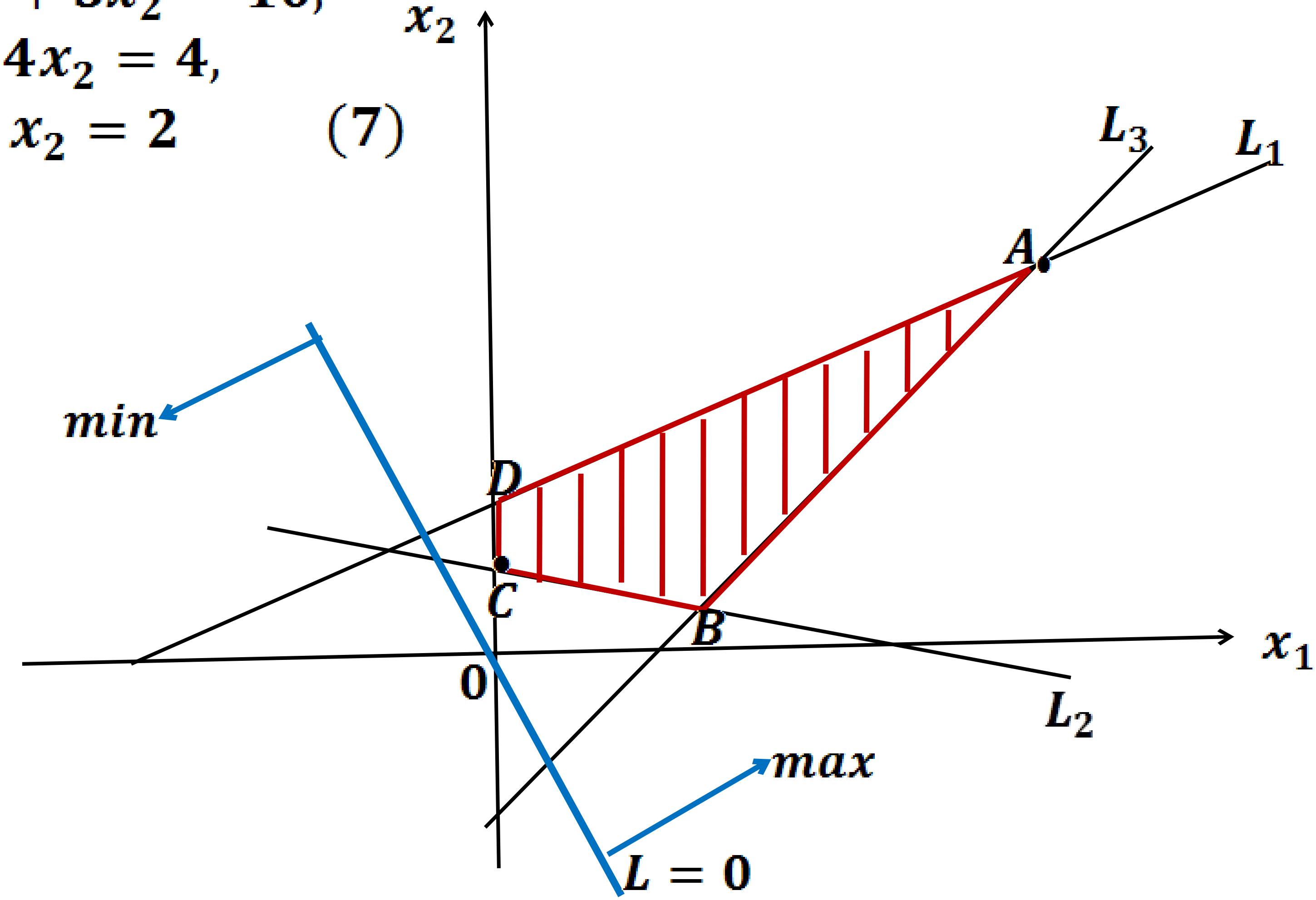
Пример. Решить ЗЛП графическим методом

$$L = 3x_1 + x_2 \to (max)min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Граничные прямые:

$$L_1: -2x_1 + 5x_2 = 10,$$
$$L_2: \quad x_1 + 4x_2 = 4,$$
$$L_3: \quad x_1 - x_2 = 2 \qquad (7)$$



минимальная точка – *C*, $C_{\min}(0,1)$

$$L_{\min} = 3 \cdot 0 + 1 = 1$$

максимальная точка – *A*, найдем координаты точки *A* решив систему уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad A_{\max}\left(\frac{20}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$L_{\max} = 3 \cdot \frac{20}{3} + \frac{14}{3} = \frac{74}{3}$$

Пример.

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количестве, соответственно равных 24, 31 и 18 штук.

Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указаны величины отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок(шт) при разкрое по способу	
	1	2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов (см^3)	12	16

- Определить, сколько листов фанеры и каким способом нужно раскроить так, чтобы было получено не менее нужного числа заготовок при минимальных отходах.

ВГУЭС